Expression des $\zeta(2k)$

Théorème : On pose $f : z \mapsto \dfrac{z}{e^z - 1}$ et on définit la suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ comme étant les nombres vérifiant

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{k!} z^k$$

au voisinage de 0. On définit pour tout $s \in \mathbb{N}^*$ le nombre

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

On a alors, pour tout entier non nul k, l'expression suivante :

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} b_{2k}.$$

Preuve du théorème :

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$. On définit alors $\varphi(x) = \exp\left(\frac{zx}{2\pi}\right)$ pour tout $x \in]-\pi, \pi]$ et on la prolonge sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.

Étape 1 : Coefficients de Fourier de φ

Comme φ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux on peut calculer ses coefficients de Fourier. Soit $n \in \mathbb{Z}^*$. On a alors

$$\begin{aligned}
c_n(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \exp(-inx) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(x(\frac{z}{2\pi} - in)) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\frac{z}{2\pi} - in} [\exp(x(\frac{z}{2\pi} - in))]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^n}{z - 2i\pi n} (\exp\left(\frac{z}{2}\right) - \exp\left(\frac{-z}{2}\right))
\end{aligned}$$

La régularité de φ permet d'utiliser le théorème de Dirichlet qui affirme que la série de Fourier de φ converge en tout point réel x vers $\dfrac{\varphi(x^+) + \varphi(x^-)}{2}$. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{\varphi(x^+) + \varphi(x^-)}{2} = (\exp\left(\frac{z}{2}\right) - \exp\left(\frac{-z}{2}\right)) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n \exp(inx)}{z - 2i\pi n}.$$

En $x = \pi$ il vient alors

$$\frac{\exp\left(\frac{z}{2}\right) + \exp\left(\frac{-z}{2}\right)}{2} = (\exp\left(\frac{z}{2}\right) - \exp\left(\frac{-z}{2}\right)) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z - 2i\pi n}.$$

Comme $z \notin 2i\pi\mathbb{Z}$ on peut ré-écrire l'égalité précédente

$$\frac{\exp\left(\frac{z}{2}\right) + \exp\left(\frac{-z}{2}\right)}{2(\exp\left(\frac{z}{2}\right) - \exp\left(\frac{-z}{2}\right))} = \frac{1}{z} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z}{z^2 + 4i\pi^2 n^2}.$$

En multipliant le terme de gauche par $\exp\left(\dfrac{z}{2}\right)$ il vient

$$\frac{\exp(z) + 1}{2(\exp(z) - 1)} = \frac{\exp(z) - 1 + 1 + 1}{2(\exp(z) - 1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(z) - 1} = \frac{1}{2} + \frac{f(z)}{z}.$$

On a alors $f(z) = 1 - \dfrac{z}{2} + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^2}{z^2 + 4\pi^2 n^2}$.

On voit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $|z| < 2\pi$ alors $\left|\dfrac{z}{2\pi n}\right| < 1$ et on peut donc faire apparaître une série géométrique :

$$\frac{z^2}{z^2 + 4\pi^2 n^2} = \frac{z^2}{4\pi^2 n^2} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(4\pi^2 n^2)^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}}.$$

On pose alors pour tout $k, n \in \mathbb{N}^*$ $u_{n,k} = (-1)^{k-1} \dfrac{z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}}$. Si n est fixé, $\displaystyle\sum_k |u_{n,k}|$ converge vers $\dfrac{|z|^2}{4\pi^2 n^2} \dfrac{1}{1 - \frac{|z|^2}{4\pi^2 n^2}} = \dfrac{|z|^2}{4\pi^2 n^2 - |z|^2}$ (attention, la somme commence bien à 1 et pas 0 !). Mais on sait que la série $\displaystyle\sum_n \frac{|z|^2}{4\pi^2 n^2 - |z|^2}$ converge (équivalent à un terme général qui converge par Riemann) et donc la famille est sommable. On peut alors échanger l'ordre de sommation comme voulue pour tout $0 < |z| < 2\pi$:

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 - \frac{z}{2} + 2\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_{n,k} \\ &= 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{2k}}\right) z^{2k}. \end{aligned}$$

On en déduit alors le résultat voulu !□

Remarques importantes :

- C'est très calculatoire !
- Peut-être connaître un minimum le théorème de Dirichlet.